Adı-Soyadı:
Numarası:

MAT 203 ANALİTİK GEOMETRİ I DERSİ ARASINAV SORULARI

02.12.2021

1) Aralarında 60° açı bulunan xoy eğik koordinat sisteminde $O'(2,4)$ noktası veriliyor. $x'o'y'$ dik koordinat sisteminde verilen $A\left(6,2\sqrt{3}\right)$ noktasının xoy eğik koordinat sistemindeki koordinatlarını bulunuz. ($m\left(\widehat{xx'}\right)=0^\circ$)

2) $\vec{u}=(0,2,1)$ ve $\vec{v}=(1,-1,3)$ vektörlerine dik olan bir vektör bulunuz.

3) $P(3,1,2)$, $\theta(1,1,1)$ ve $R(3,-5,5)$ noktaları verilsin. $\overset{\Delta}{P\theta R}$ üçgeninin alanını bulunuz.

4) $\vec{u}=(1,2,0)$ ile $\vec{v}=(2,-1,10)$ vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.

5) Kartezyen koordinatlarda verilen $A(0,2)$ noktasının kutupsal koordinatlarını bulunuz.

6) Küresel koordinatlarda verilen $P\left(8,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$ noktasının silindirik koordinatlarını bulunuz.

7) Uzayda $A(1,4,-2)$ ve $B(-3,5,0)$ noktalarından geçen doğrunun kartezyen denklemini bulunuz.

8) $A(1,2)$ noktasından geçen ve x ekseniyle 60° açı yapan doğrunun denklemini bulunuz.

9) $d_1 \cdots \frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-5}{2}=t$ ve $d_2 \cdots x-1=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{-3}=\lambda$ doğrularının birbirlerine göre durumlarını inceleyiniz.

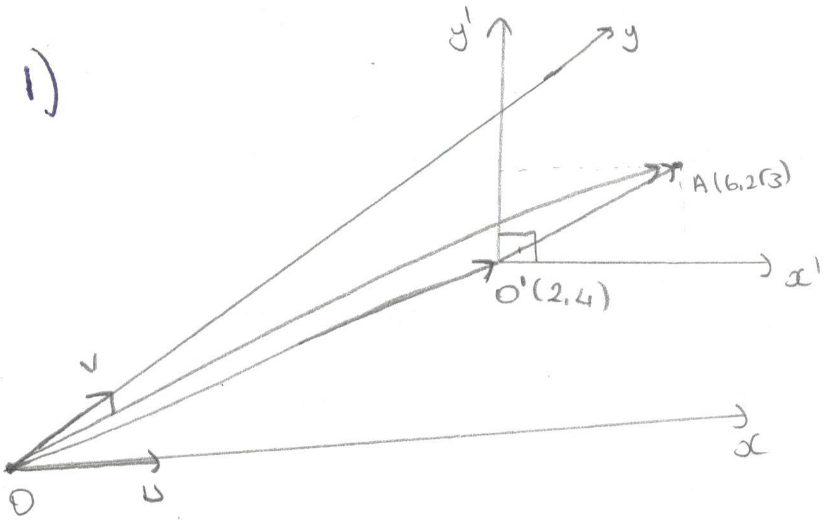
10) $P(1,2,2)$, $\theta(2,-1,4)$ ve $R(3,5,-2)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

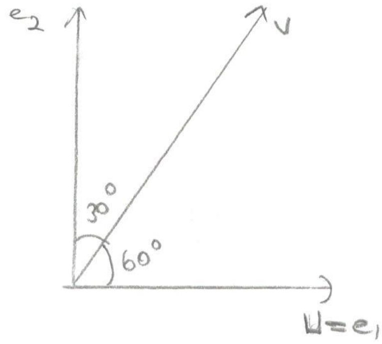
Not: Sorular eşit puanlı ve süre ~~90~~ 100 dakikadır.

Prof. Dr. Emin KASAP

CEVAP ANAHTARI

1)





$\vec{OO'} = 2\vec{u}+4\vec{v}$, $\vec{O'A} = 6\vec{e_1}+2\sqrt{3}\,\vec{e_2}$ olur. A noktasının xoy sistemindeki koordinatları (x_1,y_1) olsun. Buradan

$$\vec{OO'} + \vec{O'A} = \vec{OA} \Rightarrow 2\vec{u}+4\vec{v}+6\vec{e_1}+2\sqrt{3}\,\vec{e_2} = x_1\vec{u}+y_1\vec{v}$$

$$\Rightarrow (x_1-2)\vec{u}+(y_1-4)\vec{v} = 6\vec{e_1}+2\sqrt{3}\,\vec{e_2}$$

olur. Son eşitliğin iki yanı sırasıyla $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ ile iç çarpılırsa

$$\begin{cases} (x_1-2)+(y_1-4)\cos 60^\circ = 6 \\ (x_1-2)\cos 60^\circ+(y_1-4) = 6\cos 60^\circ + 2\sqrt{3}\cdot\cos 30^\circ \end{cases}$$ olup

$$\begin{cases} x_1-2+\dfrac{y_1}{2}-2 = 6 \\ \dfrac{x_1}{2}-1+y_1-4 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+\dfrac{y_1}{2} = 10 \\ x_1+2y_1 = 22 \end{cases} \Rightarrow y_1 = 8,\ x_1 = 6$$

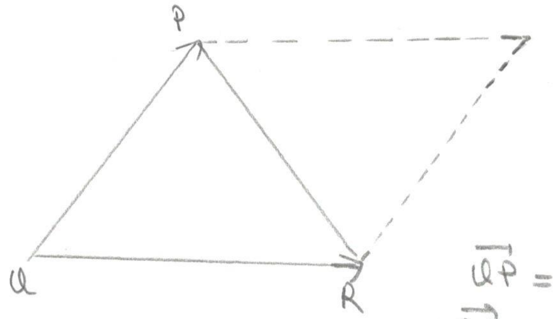
bulunur. $A = (x_1,y_1) = (6,8)$ olur.

2) $\vec{u}\wedge\vec{v}$, hem $\vec{u}$ hem de $\vec{v}$ vektörüne dik bir vektördür.

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = e_1[6+1]-e_2[-1]+e_3[-2] = (7,1,-2)$$

bulunur.

3)



$\overset{\triangle}{PQR}$ üçgeninin alanı A olsun. O halde

$$A = \frac{\|\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{QR}\|}{2} \quad \text{olur.}$$

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (3,1,2) - (1,1,1) = (2,0,1)$$
$$\overrightarrow{QR} = R - Q = (3,-5,5) - (1,1,1) = (2,-6,4)$$

olup

$$\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{QR} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} = e_1[6] - e_2[8-2] + e_3[-12] = (6,-6,-12)$$

olur.

$$A = \frac{\|\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{QR}\|}{2} = \frac{\|(6,-6,-12)\|}{2} = \frac{6\,\|(1,-1,-2)\|}{2} = 3.\sqrt{1+1+4} = 3\sqrt{6}$$

bulunur.

4) $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri arasındaki açı α olsun.

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (1,2,0), (2,-1,10) \rangle = 0$ olduğundan $\vec{u} \perp \vec{v}$ olup $\alpha = 90°$ dir.

" $\cos\alpha = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|}$ veya $\sin\alpha = \dfrac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|}$ kullanılarak hesaplanabilir. "

5) $A(0,2)$ için $x=0$, $y=2$ dir. $r = \mp\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow r = \mp 2$

$r=2$ için $\begin{matrix} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 = 2\cos\alpha \\ 2 = 2.\sin\alpha \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = 1 \end{matrix} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

$r=-2$ için $\begin{matrix} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 = -2\cos\alpha \\ 2 = -2\sin\alpha \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = -1 \end{matrix} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2}$

olup $(r,\alpha) = \left(2, \frac{\pi}{2}\right) = \left(-2, \frac{3\pi}{2}\right)$ bulunur.

6) $P\left(8, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ noktasının kartezyen koordinatlarını bulalım.

$P(r,\alpha,\beta) = P\left(8, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ olup

$$x = r\cos\alpha\sin\beta = 8\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6} = 2$$
$$y = r\sin\alpha\sin\beta = 8\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow P(x,y,z) = P\left(2, 2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}\right)$$
$$z = r\cos\beta = 8\cos\frac{\pi}{6} = 4\sqrt{3}$$

olur.

6. cevabın devamı) Bu noktanın silindirik koordinatlarını bulalım.

$P(\alpha, r, z)$ olmak üzere

$$x = r\cos\alpha \quad y = r\sin\alpha \quad z = z \Rightarrow \begin{cases} r = \mp\sqrt{x^2+y^2} \\ \alpha = \arctan\frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$ olur.

$r = \mp\sqrt{4+12} = \mp 4$, $\alpha = \arctan(\sqrt{3}) \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ olur.

1) $r = 4$ olsun.

$\overset{+}{x} = \overset{+}{r}\cos\overset{+}{\alpha}$
$\overset{+}{y} = \overset{+}{r}\sin\overset{+}{\alpha}$ $\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

2) $r = -4$ olsun.

$\overset{+}{x} = \overset{-}{r}\cos\overset{-}{\alpha}$
$\overset{+}{y} = \overset{-}{r}\sin\overset{-}{\alpha}$ $\Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3}$

olur. $P(\alpha, r, z) = \left(4, \frac{\pi}{3}, 4\sqrt{3}\right) = \left(-4, \frac{4\pi}{3}, 4\sqrt{3}\right)$ elde edilir.

7) Bu d doğrusunun doğrultmanı $\vec{u}$ olsun. O halde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ alınabilir.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-3,5,0) - (1,4,-2) = (-4,1,2)$ olup

$d \ldots \frac{x-1}{-4} = y-4 = \frac{z+2}{2} = t$

bulunur.

8) x ekseniyle 60° açı yaptığından $m_d = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ olur.

$y - y_0 = m_d(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = \sqrt{3}(x-1)$

$\Rightarrow y - 2 = \sqrt{3}x - \sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}x - \sqrt{3} + 2$

bulunur.

9) $\vec{u}_{d_1} = (-1,2,2)$ ve $\vec{u}_{d_2} = (1,-1,-3)$ sırasıyla d_1 ve d_2 doğrularının doğrultmanlarıdır. $\vec{u}_{d_1} = c\,\vec{u}_{d_2} \Leftrightarrow (-1,2,2) = c(1,-1,-3)$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ yoktur. O halde d_1 ile d_2 paralel ya da çakışık değildir.

$t=0$ için $A(2,1,5) \in d_1$, $\lambda = 0$ için $B(1,2,1) \in d_1$ olur.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,2,1) - (2,1,5) = (-1,1,-4)$

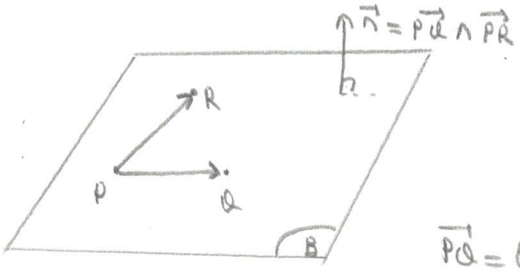
olup

9. cevabın devamı)

$$\det(\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -1(4+3)-2(-4-3)+2(1-1) = 7 \neq 0$$

olduğundan d_1 ile d_2 doğruları aykırıdırlar.

10)



Aranan B düzleminin normali

$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}$ olur.

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,-1,4) - (1,2,2) = (1,-3,2)$

$\overrightarrow{PR} = R - P = (3,5,-2) - (1,2,2) = (2,3,-4)$ olup

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = e_1[12-6] - e_2[-4-4] + e_3[3+6] = (6,8,9)$$

bulunur. B nin denklemine $ax+by+cz+d=0$ denirse $a=6$, $b=8$, $c=9$ olup

$$B \ldots 6x+8y+9z+d=0$$

olur. $P(1,2,2) \in B$ olduğundan

$$6+16+8+d=0 \Rightarrow d=-40$$

olup

$$B \ldots 6x+8y+9z-40=0$$

bulunur.